第一章 函数、极限、连续

背诵重点

1. 常见奇、偶函数

奇函数：$y=\sin x$. $y=\tan x$. $y=\arcsin x$. $y=\arctan x$. $y=x^{2n+1}$

$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. $y=f(x)-f(-x)$

偶函数：$y=x^{2n}$. $y=\cos x$. $y=|x|$. $y=c$. $y=f(x)+f(-x)$.

2. 函数极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

3. 需要讨论左、右极限的三种情况：
① e^{∞}. ② $\arctan\infty$ ③ 分段函数在分段点的极限

4. 保号性：① $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$A>0 \Rightarrow x\to x_0$ 时，$f(x)>0$

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$f(x)>0 \Rightarrow A\geq 0$

5. 常用极限. ① $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$. ② $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a=\begin{cases}+\infty & a>0\\ 1 & a=0\\ 0 & a<0\end{cases}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0 & -1<q<1\\ +\infty & q>1\\ 1 & q=1\\ \infty & q<-1\\ \text{不存在} & q=-1\end{cases}$

6. 可先求部分极限的两种情况：
① 整体加减中找存在. ~~$\lim f(x)+\lim g(x)$~~

$\lim[f(x)+g(x)] \xlongequal{\lim f(x)=a} a+\lim g(x)$.

② 整体乘除中找非0因子. $\lim[f(x)\cdot g(x)] \xlongequal{\lim f(x)=a\neq 0} a\cdot\lim g(x)$.

7. 有其母必有其子. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = a$, $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$.

8. 有其子未必有其母 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$, $\lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$.

9. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = a$, $\lim f(x) = \infty \Rightarrow \lim g(x) = 0$.

10. 夹逼准则的结论:

$$a_i > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, \cdots, a_m\}$$

11. 单调有界准则. ① $\{x_n\}$ 单增有上界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

② $\{x_n\}$ 单减有下界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

12. 无穷大的"排序": $x \to +\infty$, $\underset{(a>1)}{a^x} > \underset{(b>0)}{x^b} > \underset{(c>0)}{\ln^c x}$

13 无穷小的比较. $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. $(\beta \neq 0)$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha\text{是}\beta\text{的高阶无穷小, 记 } \alpha = o(\beta) \\ \infty, & \text{低阶} \\ C \neq 0 & \text{同阶} \\ C = 1 & \text{等价} \end{cases}$$

$k > 0$, 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0$, 则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

14. 等价无穷小替换定理. $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$

① 乘除放心用 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$

② 加减慎用: $\alpha \sim ax^n$, $\beta \sim bx^m \Rightarrow \alpha \pm \beta \sim ax^n \pm bx^m (\neq 0)$.

15. 常见等价无穷小.

(1) $x\to 0$ 时, $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$

$(1+x)^a-1\sim ax$

(2) $x\to 0$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\sim x-\ln(1+x)$

(3) $x\to 0$. $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$ $x-\arcsin x\sim-\frac{1}{6}x^3$

$x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$ $x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$

(4) $f(x)\to 1$, $\ln f(x)\sim f(x)-1$.

(5) 低阶无穷小+高阶无穷小 ~ 低阶无穷小.

(6) $f(x)$、$g(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\Rightarrow\int_0^x f(t)dt\sim\int_0^x g(t)dt$

17. 连续定义. $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

18. 连续充要条件.

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

19. 间断点及分类.

① 找间断点: 无定义点、分段点

② 分类.

$$x_0\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类}\begin{cases}\text{可去 } f(x_0-0)=f(x_0+0)\text{ 存在}\neq f(x_0)\\ \text{跳跃 } f(x_0+0)\neq f(x_0-0)\text{ 存在}\end{cases}\\ \text{第二类: } f(x_0-0)\text{、}f(x_0+0)\text{ 至少一个不存在.}\end{cases}$$

20. 平均值定理.

连续函数的函数值的平均值仍是一个函数值.

第二章 导数与微分

背诵重点

1. 导数定义. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \text{存在}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ \text{存在}$$

2. 可导的充要条件. $f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=A=f'_+(x_0)$

3. 绝对值函数的可导性结论:

① $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处不可导.

② $y=|x-a|\cdot g(x)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 连续. $y=|x-a|\cdot g(x)$ 在 $x=a$ 可导 $\Leftrightarrow g(a)=0$.

4. 分段函数求导: 非分段点处用求导公式，求导法则

分段点处用导数定义.

5. 反函数求导: 背公式. $x'=\dfrac{1}{y'}$，$x''=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

6. 隐函数求导，将 y 当作 x 的函数，方程两边对 x 求导.

7. 参数方程求导: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ $\quad\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\dfrac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

写成 $\dfrac{d(\ )}{d(\ )}$ 的形式，分子分母同除以 dt.

8. 常见高阶导公式. ① $y=e^{ax+b}$，$y^{(n)}=e^{ax+b}\cdot a^n$ ② $y=\sin(ax+b)$，$y^{(n)}=\sin(ax+b+\frac{\pi}{2}n)\cdot a^n$

③ $y=\cos(ax+b)$，$y^{(n)}=\cos(ax+b+\frac{\pi}{2}n)\cdot a^n$ ④ $y=\dfrac{1}{ax+b}$，$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}a^n$

⑤ $y=\ln(ax+b)$ $\quad y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n}a^n$

9. 求高阶导的方法.

(1) 归纳法.

(2) 公式法. $(u\pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

$$(u\cdot v)^{(n)} = C_n^0 u\cdot v^{(n)} + C_n^1 u'\cdot v^{(n-1)} + C_n^2\cdot u''\cdot v^{(n-2)} + \cdots + C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} + \cdots + C_n^n u^{(n)} v$$

(3) 泰勒展开求 $f^{(n)}(x_0)$.

将 $f(x)$ 在 x_0 处展开, 找到 $(x-x_0)^n$ 的系数 a_n, 则 $f^{(n)}(x_0)=a_n\cdot n!$

(4) 奇偶性.

① $f(x)$ 奇函数 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 偶 $\Rightarrow$ $f''(x)$ 奇 $\Rightarrow$ $f'''(x)$ 偶 $\Rightarrow \cdots$

$f^{(2n)}(x)$ 奇, $f^{(2n+1)}(x)$ 偶

$f^{(2n)}(0)=0$

② $f(x)$ 偶 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 奇 $\Rightarrow$ $f''(x)$ 偶 $\Rightarrow$ $f'''(x)$ 奇 $\Rightarrow \cdots$

$f^{(2n)}(x)$ 偶, $f^{(2n+1)}(x)$ 奇, $f^{(2n+1)}(0)=0$

(5) 泰勒. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=A \Rightarrow f^{(n)}(x_0)=A\cdot n!$

10. 微分. ① $dy=f'(x)\cdot dx$. ② $\Delta y=dy+o(\Delta x)$

11. 几何意义.

$y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

dy: 沿切线方向的增量.

第三章 微分中值定理、导数应用

背诵重点

1. 费马引理.

$f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，在 x_0 处可导，对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，都有 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $f(x)\ge f(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$.

2. 罗尔

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导 $f(a)=f(b)\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=0$

构造辅助函数的公式：$f'(\xi)+p(\xi)f(\xi)=0$. $F(x)=e^{\int p(x)dx}\cdot f(x)$.

3. 拉格朗日.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导 $\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论：$f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)\equiv C$.

4. 柯西.

$f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，且 $g'(x)\ne0$

$\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)$，s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

5. 泰勒

① $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

② $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，

其中，ξ 介于 x 和 x_0 之间.

6. 常用的泰勒公式

① $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

② $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

③ $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$

④ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

⑤ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$

7. 泰勒展开原则

① 分式型：分子、分母同次

② 加减型：各自展开，合并同类项，出现不为0的系数停止.

8. 极值点

① 定义. $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义. 对于$\forall x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$，都有

1) $f(x) < f(x_0)$，则$f(x_0)$为$f(x)$的极大值；

2) $f(x) > f(x_0)$，则$f(x_0)$为$f(x)$的极小值；

x_0为$f(x)$的极值点.

② 必要条件：$f(x)$在x_0处取极值 $\Longrightarrow$ $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$不存在.

③ 极值的第一充分条件.

前提：x_0为驻点或不可导点，$f(x)$在x_0处连续.

$\left.\begin{array}{l}f(x)\text{在}x_0\text{左右单调性改变}\\ f'(x)\text{在}x_0\text{左右正负号改变}\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$为极值.

④ 第二充分条件.

$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0 \Rightarrow f(x_0)$为极值.

9 拐点.

① 定义. 连续函数$f(x)$，曲线$y=f(x)$在经过点$(x_0, f(x_0))$时曲线的凹凸性改变了，则称点$(x_0, f(x_0))$为该曲线的拐点

② 必要条件. $(x_0, f(x_0))$是$y=f(x)$的拐点 $\Rightarrow f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在

③ 第一充分条件.

前提 x_0满足$f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在. $f(x)$在x_0处连续.

$\left.\begin{array}{l}f(x)\text{在}x_0\text{左右凹凸性改变}\\ f'(x)\text{在}x_0\text{左右单调性改变}\\ f''(x)\text{在}x_0\text{左右正负号改变}\end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, f(x_0))$为拐点.

④ 第二充分条件.

$f''(x_0)=0$ 且 $f'''(x_0)\neq 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$为拐点.

10. 渐近线.

① 铅直: x_0 为 $f(x)$ 的无定义点 或 分段点

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

② 水平.

若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，则 $y=A$ 是 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，则 $y=B$ 是 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

③ 斜渐近线. $y=kx+b$. $(k\neq0)$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$$

或 $$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx].$$

11. 曲率 (数一、二)

① 曲率 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

② 曲率半径 $R=\dfrac{1}{k}$

12. 弧微分 (数一、二)

曲线 $y=f(x)$ 的弧微分 $ds=\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $\qquad ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

$r=r(\theta)$ $\qquad ds=\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta$

第四章 不定积分

背诵

1. 原函数

若 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

⑴ 原函数可导、连续.

② $F(x)$ 奇 $\Rightarrow F'(x)$ 偶， $F(x)$ 偶 $\Leftrightarrow F'(x)$ 奇

③ $F(x)$ 以 T 为周期 $\Rightarrow F'(x)$ 以 T 为周期.

2. 不定积分.

$f(x)$ 的带有任意常数的原函数为 $f(x)$ 的不定积分.

$$F'(x)=f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

3. 不定积分公式

⑴ $\int x^{u}dx=\frac{1}{u+1}x^{u+1}+C \ (u\neq -1)$. $\quad \int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$. $\quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$

② $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

③ $\int e^{x}dx=e^{x}+C$， $\quad \int a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}a^{x}+C$

④ $\int \cos x\,dx=\sin x+C \quad \int \sin x\,dx=-\cos x+C$

⑤ $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C \quad \int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

⑥ $\int \sec x\cdot\tan x\,dx=\sec x+C \quad \int \csc x\cdot\cot x\,dx=-\csc x+C$

⑦ $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C \quad \int \csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$

⑧ $\int \tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C \quad \int \cot x\,dx=\ln|\sin x|+C$

⑨ $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$ $\quad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

⑩ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$

⑪ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$

⑫ $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$, $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + c$.

⑬ $$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt3}{2})}dx = \frac{2}{\sqrt3}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}} + c$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{x^2+x+1}d(\cancel{x}^2+x+1) = \ln(x^2+x+1) + c$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{a}{2}(2x+1)+(b-\frac{a}{2})\cdot 1}{x^2+x+1}dx$$

⑭ $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin bx)' \\ e^{ax} & \sin bx \end{vmatrix}}{a^2+b^2} + c$$

4. 换元法 ① $\sqrt{a^2-x^2}$, $x = a\sin t$

② $\sqrt{a^2+x^2}$, $x = a\tan t$

③ $\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad x = a\sec t$

④ $\sqrt{一次} = t$

5. 分部积分中找 $V(x)$: 指三幂对反.

6. 有理函数的不定积分

假分式 = 整式 + 真分式

真分式（分母可分解因式）= 真分式 + 真分式

留数法. ① 单根：求谁挡谁带谁

② 重根：求谁挡谁（多挡一次，求导）带谁

③ 无实根：一次系数，$x \to \infty$ 两边抓大头，

找 $\frac{1}{x}$ 的系数.

常数用特值法.

7. 万能公式换元.

$\tan\frac{x}{2} = t$ ，$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ，$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

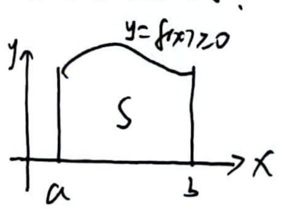
第五章 定积分及应用

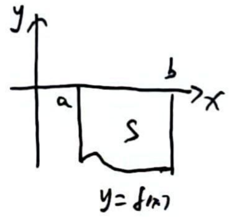
背诵

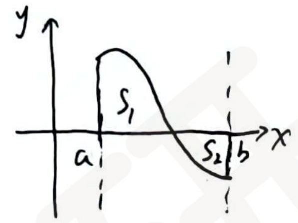
1. 定积分定义：分割、近似、求和、取极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$，用于求数列和的极限.

2. 几何意义:

① 

② 

③ 

$S=\int_a^b f(x)dx$　　$S=-\int_a^b f(x)dx$　　$\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2$.

3. 性质.

① 定积分是常数

② $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ，$\int_a^a f(x)dx=0$

③ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

求分段函数的定积分时，画出积分区间和分段点，用区域可加性.

④ 比较大小.

$x\in[a,b]$，$f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

$x\in[a,b]$，$f(x)\ge0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\ge0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$$

⑤ 估值不等式

$m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

⑥ 积分中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

$\xi \in (a,b)$

4. 变限积分函数

① 连续性：变限积分函数是连续函数.

② 可导性.

$f(x)$ 连续 $\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导 且 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

注：x_0 为 $f(x)$ 可去间断点 $\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处可导.

③ 奇偶性

$f(x)$ 奇 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 偶；$f(x)$ 偶 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 奇.

④ 求导公式.

1) 暴力求导. $y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,t)\,dt$

$$y' = f[x,\varphi_2(x)]\,\varphi_2'(x) - f[x,\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x) + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\,dt$$

2) $y=\int_a^x f(x-t)dt$ 换元法后求导

3) $y=\int_a^x \left[\int_b^t g(u)du\right]dt$，$y'=\int_b^x g(u)du$

5. 定积分的计算

(1) 化简方法.

① 奇0偶倍.

$f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

$f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$$

② 华里士公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\geq 3 \text{ 奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad \int_0^{\pi} \cos^n x\,dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 奇数} \\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx, & n \text{ 偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x\,dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 奇数} \\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, & n \text{ 偶数} \end{cases}$$

③ 几何意义. $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

④ 周期性.

$f(x)$ 以 T 为周期 $\Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = \int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$$

⑤ 被积函数是常数

$$\int_a^b 1\,dx = b-a. \qquad \int_0^x x^2\,dt = x^3$$

⑥ 常见结论.

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\,dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x)\,dx$

(2) 常规方法.

① 牛-莱公式. $F'(x)=f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

② 定积分的换元法.

$\int_a^b f(x)\,dx \xlongequal{x=\phi(t)} \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\cdot\phi'(t)\,dt$，其中 $\phi(\alpha)=a$, $\phi(\beta)=b$.

上限对上限，下限对下限.

③ 定积分的分部积分法.

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,d\,v(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

6. 反常积分的定义

① 无穷区间　$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$

2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

② 无界函数（瑕积分）

· 瑕点：$f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 为瑕点.

① 瑕点为 $x=a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

② 瑕点为 $x=b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

③ 瑕点为 $x=c$　$(a<c<b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$\int_a^c f(x)\,dx$，$\int_c^b f(x)\,dx$ 都收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ 收敛.

7. 熟记的反常积分

① $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} 收敛, & p>1 \\ 发散, & p\le 1 \end{cases}$

② $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \cdot \ln^q x} dx \begin{cases} 收敛, & p>1 \\ 发散, & p<1 \\ 收敛, & p=1,\ q>1 \\ 发散, & p=1,\ q\le 1 \end{cases}$

③ $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} 收敛, & p<1 \\ 发散, & p\ge 1 \end{cases}$ $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \begin{cases} 收敛, & p<1 \\ 发散, & p\ge 1 \end{cases}$

8. 反常积分敛散性判别法.

① 比较法一般形式：大收小收，小发大发

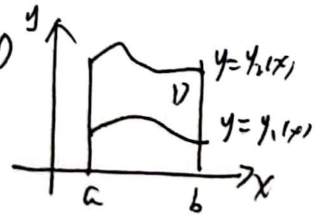
② 比较法极限形式：

等价，同敛散；高阶、低阶看大小.

9. 定积分求平面图形的面积

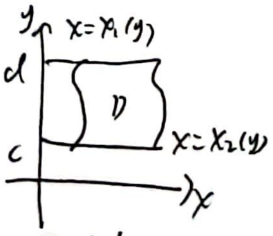
(1) 方法：几何意义、公式、二重积分法.

①



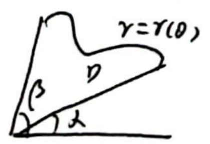
$S_D=\int_a^b [y_2(x)-y_1(x)]dx$

②



$S_D=\int_c^d [x_2(y)-x_1(y)]dy$

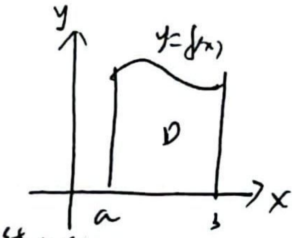
③ 极坐标



$S_D=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$

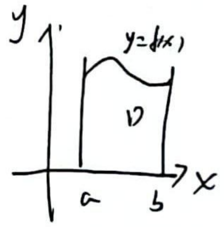
④ $S_D=\iint_D 1 d\sigma$

10、求旋转体的体积，方法：(1) 公式 ② 二重积分.

①


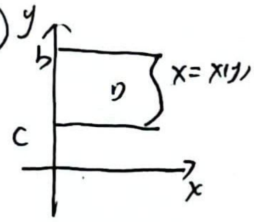
D绕x轴

$V_x=\int_a^b \pi y^2 dx$

②


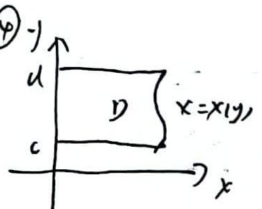
D绕y轴

$V_y=\int_a^b 2\pi x y\, dx$

③


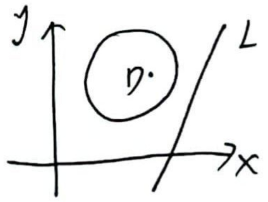
D绕x轴

$V_x=\int_c^d 2\pi x y\, dy$

④


D绕y轴

$V_y=\int_c^d \pi x^2 dy$

⑤


D绕L转一周.

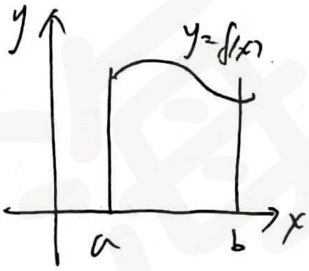
$$V=\iint_D 2\pi r(x,y)\, dx dy$$

其中 $r(x,y)$ 是D上任一点 (x,y) 到L的距离.

11. 弧长.（数一、数二）.

对弧微分积分 $s=\int_L ds$

12 旋转体的侧面积.



$$S_{侧}=\int_L 2\pi y\, ds$$

第六章 微分方程

1. 可分离变量的微分方程

方程形式：$y' = f(x)\cdot g(y)$

解法：　分离变量，两边积分

2. 齐次微分方程

方程形式：$y' = f(\frac{y}{x})$

解法：　换元法．$\frac{y}{x} = u$

3. 一阶线性微分方程

方程形式：$y' + p(x)\cdot y = q(x)$

解法：　公式 $y = e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$

4. 伯努利方程

方程形式：$y' + p(x)\cdot y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$

解法：　换元法．$y^{1-n} = u$．

5. 全微分方程

方程形式：$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$，其中 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$．

解法：$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = C$．

6. 可降阶的微分方程.

(1) $y''=f(x,y')$. 换元 $y'=p(x)$. $y''=p'(x)$

(2) $y''=f(y,y')$ 换元 $y'=p(y)$, $y''=p'(y)\cdot y'=p'\cdot p$

7. 二阶常系数齐次线性微分方程.

方程形式 $y''+ay'+by=0$

解法. 特征方程法.

1) 特征方程: $\lambda^2+a\lambda+b=0$

2) 求特征根: λ_1, λ_2.

3) 写通解: (1) $\lambda_1\neq\lambda_2\in R$, $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

(2) $\lambda_1=\lambda_2\in R$, $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2x\cdot e^{\lambda_1x}$

(3) $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

8. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解.

方法: 待定系数法.

(1) $y''+ay'+by=e^{ux}\cdot p_n(x)$. 设 $y^*=x^k\cdot e^{ux}\cdot(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)$

$k=\begin{cases}0 & u\text{不是 }\lambda^2+a\lambda+b=0\text{ 的根.}\\1 & \text{是 单根}\\2 & \text{是 重根}\end{cases}$

(2) $y''+ay'+by=e^{\alpha x}\cdot p_n(x)\cdot\cos\beta x$.

设 $y^*=x^k\cdot e^{\alpha x}\cdot[(a_nx^n+\cdots+a_0)\cos\beta x+(b_nx^n+\cdots+b_0)\sin\beta x]$

$k=\begin{cases}0 & \alpha\pm\beta i\text{ 不是 }\lambda^2+a\lambda+b=0\text{ 的根}\\1 & \text{是 根}\end{cases}$

9. 欧拉方程.

方程形式 $x^2\cdot y''+axy'+by=f(x)$.

解法: 变换方程. $x=e^t$ $(x>0)$.

10. 解的性质与结构.

(1) C_1齐$_1$+C_2齐$_2$=齐 $(C_1, C_2\in R)$

(2) k_1非$_1$+k_2非$_2$ $\xrightarrow{k_1+k_2=0}$ 齐

$\xrightarrow{k_1+k_2=1}$ 非

(3) 非$_1$-非$_2$=齐. 非+齐=非,

(4) 非通=齐通+非特.

11. 差分方程. (数三)

(1) 齐次 $y_{t+1}+ay_t=0$. 解 $y_t=C\cdot(-a)^t$ $(C\in R)$

(2) 非齐次. $y_{t+1}+ay_t=d^t\cdot p_m(t)$

非通=齐通+非特

设非特为 $y_t^*=t^k\cdot d^t\cdot(a_mt^m+\cdots+a_1t+a_0)$

$$k=\begin{cases}0 & a+d\neq 0\\ 1 & a+d=0\end{cases}$$

第七章 多元函数微分学

1. 二元极限的结论. $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^p y^q}{x^m+y^n}$ (m,n 正整数, $p,q\ge 0$)

(1) m,n 中有奇数, 则 I 不存在.

(2) m,n 中全为偶数时, $\begin{cases}\dfrac{p}{m}+\dfrac{q}{n}>1, \text{则 } I=0\\ \dfrac{p}{m}+\dfrac{q}{n}\le 1, \text{则 } I \text{ 不存在.}\end{cases}$

2. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

3. 偏导数的定义.

$$f_x'(x_0,y_0)=\left.\frac{d f(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \text{ 存在}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \text{ 存在}$$

$$f_y'(x_0,y_0)=\left.\frac{d f(x_0,y)}{dy}\right|_{y=y_0}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \text{ 存在.}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \text{ 存在}$$

4. 求 $f_x'(x_0,y_0)$ 的方法.

① $\cancel{f_x'(x_0,y_0)}$ $\left.f_x'(x,y)\right|_{(x_0,y_0)}$

② 先代值 $f(x,y_0)$, 再求导 $\dfrac{df(x,y_0)}{dx}$, 后代值 $\left.\dfrac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$

③ 偏导数的定义.

5. 全微分

(1) 定义. $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$.

(2) 等价定义. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$

6. 几个关系.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{等价定义} \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
f'_x(x,y)、f'_y(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 处连续} \arrow[r, Rightarrow] & f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 处可微} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & f'_x(x_0,y_0)、f'_y(x_0,y_0)\text{ 都存在} \\
 & f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 处连续} &
\end{tikzcd}
$$

7. 判断 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的步骤:

$$
\begin{tikzcd}
\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)\ ? \arrow[r, "No"] \arrow[d, "Yes"] & f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 处不可微} \\
f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0)\text{ 存在?} \arrow[ur, "No"] \arrow[d, "Yes"] & \\
\lim \dfrac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0\ ? \arrow[uur, "No"'] \arrow[d, "Yes"] & \\
f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 处可微} &
\end{tikzcd}
$$

8. 多元复合函数求偏导：链式法则

注：① f_1' 的自变量与 f 的自变量相同

② 一元、多元复合时，分清一元是求导，多元是求偏导

9. 多元隐函数求偏导：公式法。

$F(x,y,z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$、

(1) 找三元函数 $F(x,y,z)$

(2) F 分别对 x, y, z 求偏导。F_x'，F_y'，F_z'

(3) 公式 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$

10 一般极值的求法（步骤）

(1) 求驻点 $\begin{cases} f_x'=0 \\ f_y'=0 \end{cases}$

(2) 求 f_{xx}''，f_{xy}''，f_{yy}''.

求每个驻点处的 A, B, C

(3) 判断：① $AC-B^2>0$，$A>0$，极小值

$AC-B^2>0$，$A<0$，极大值

② $AC-B^2<0$，不取极值

③ $AC-B^2=0$，不确定（换方法）

11. 条件极值.

拉格朗日乘数法.

解方程组：用消元法.

12. 最值.

求 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最值 步骤：

1) 求 f 在 D 内部的驻点及其函数值

2) 求 f 在 D 边界上的最值（条件极值）

3) 比较大小.

第八章 二重积分

1. 几何意义

$f(x,y)\geq 0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表示以 D 为底，$z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

2. 性质

① 二重积分是一个常数.

② 区域可加性

$D=D_1+D_2$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

③ $\iint\limits_D 1\,d\sigma=S_D$

④ 比较大小

$(x,y)\in D$ 时 $f(x,y)\leq g(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)d\sigma\leq\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

$(x,y)\in D$ 时 $f(x,y)\geq 0 \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)d\sigma\geq 0$

⑤ 二重积分的积分中值定理

$f(x,y)$ 在 D 上连续 $\Rightarrow \exists(\xi,\eta)\in D$ s.t. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot S_D$

3. 二重积分的计算

① 直角坐标系的积分次序：X-型区域 $\int dx\int dy$

Y-型区域 $\int dy\int dx$.

② 极坐标的积分次序：$\int d\theta\int rdr$. $\int rdr\int d\theta$

③ 确定上下限的方法：穿线法.

4. 二重积分的化简方法.

① 奇0偶倍.

D关于y轴对称，$f(x,y)$是x的奇函数 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=0$

D关于y轴对称，$f(x,y)$是x的偶函数 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$.

D关于x轴对称，$f(x,y)$是y的奇函数 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=0$

D关于x轴对称，$f(x,y)$是y的偶函数 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$.

② 轮换对称性.

1) D关于 $y=x$ 对称 $\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(y,x)]d\sigma$.

2) $\left.\begin{array}{l}D\text{可分成关于}y=x\text{对称的}D_1\text{和}D_2\\ f(x,y)=f(y,x)\end{array}\right\} \Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$.

③ 形心公式反用

D的形心为 $(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow \iint_D x\,d\sigma=\bar{x}\cdot S_D$. $\iint_D y\,d\sigma=\bar{y}\cdot S_D$.

5. 二重积分的计算步骤

① 画积分区域 D

② 化简

③ 选坐标

④ 确定积分次序

⑤ 确定积分的上下限.

⑥ 计算累次积分.

第九章 无穷级数

1. 概念

$\{u_n\}$是数列，称 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为常数项级数.

$u_1+u_2+\cdots+u_n=S_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 存在，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，收敛于S，和为S.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2. 性质

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$ 同敛散 $(k\neq 0)$

(2) 收 ± 收 = 收， 收±发=发， 发±发=不确定

(3) 收敛，加括号 ⟹ 收敛

发散，去括号 ⟹ 发散.

(4) 在级数中去掉、加上、改变有限项，不改变敛散性.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 ⟹ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$|u_n|<1$ (有界性)

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

3. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n\geq 0)$ 的判别法.

① 比较判别法 $\begin{cases}\text{一般形式: 大收小收，小发大发.}\\ \text{极限形式: 同阶(等价)同敛散，高阶,低阶看大小}\end{cases}$

② 比值法. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$. 1) $l<1$，收； 2) $l>1$，发， 3) $l=1$，不确定

③ 根值法. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ 1) $l<1$，收； 2) $l>1$，发， 3) $l=1$，不确定

④ 积分法. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 同敛散.

4. 交错级数

(1) 定义. $u_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 为交错级数.

(2) 莱布尼茨

$u_n>0$ 的前提下, 若 $\{u_n\}$ 单减, $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ / $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

5. 任意项级数.

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 称 $\sum u_n$ 条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

6. 熟记积分

① 等比级数. $a\neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a\cdot q^{n-1}\begin{cases}收敛, & |q|<1\\ 发散, & |q|\geq 1\end{cases}$

$|q|<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\dfrac{a}{1-q}$ $\dfrac{首项}{1-公比}$

② P 级数. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\leq 1\end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^p n}\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\leq 1\end{cases}$

③ 交错 P 级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\begin{cases}收敛, p>0 & \begin{cases}绝对收敛, & p>1\\ 条件收敛, & 0<p\leq 1\end{cases}\\ 发散, p\leq 0 & \end{cases}$$

7. 阿贝尔定理.

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0\ (\neq 0)$ 处收敛 $\Rightarrow |x|<|x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 处发散 $\Rightarrow |x|>|x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

8. 逐项可导，积分

(1) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

(2) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

9. 求收敛半径的方法.

(1) 具体幂级数用比值法.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=a$ 处条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=|a|$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=a$ 处收敛，在 $x=-a$ 处发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=|a|$

(3) 逐项求导，积分，平移，不改变收敛半径.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$.

10. 熟记级数展开式

① $e^x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (-\infty<x<+\infty)$

② $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty<x<+\infty)$

③ $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty<x<+\infty)$

④ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

⑤ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1<x<1)$

⑥ $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (-1<x\leq 1)$

11. 傅里叶级数（数一）

(1) 傅里叶系数与傅里叶级数

设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，在 $[-l, l]$ 上可积，则称

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

称级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数.

(2) 定义在 $[-l, l]$ 上的 $f(x)$ 展开

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad x\in[-l,l]$$

(3) 定义在 $[-l, l]$ 上的奇、偶函数 $f(x)$ 展开

1) $f(x)$ 为奇函数. $x\in[-l,l]$.

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad x\in[-l,l]$$

2) $f(x)$ 为偶函数. $x\in[-l,l]$

$$b_n = 0. \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x \qquad x\in[-l,l]$$

(4) 在 $[0, l]$ 上的函数 $f(x)$ 展开为正弦或余弦级数.

1) 正弦. $b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad x\in[0,l]$$

2) 余弦. $a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$ $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$,

第十章 多元积分学(数一)

1. 三重积分的计算 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$

(1) 直角坐标

① Ω的投影好找，积分次序 $\iint dxdy\int dz$，投影法.

② Ω的z的范围好找，积分次序 $\int dz\iint dxdy$，截面法.

③ 找上下限：穿线法.

(2) 化简计算：奇0偶倍、轮换对称性、被积函数为常数.

(3) 球坐标.

① 选球坐标原则：Ω与锥面、球面有关或 $f(x,y,z)$ 中含 $x^2+y^2+z^2$.

② 球坐标与直角坐标的关系. $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ z=r\cos\varphi. \end{cases}$

③ 积分次序 $\int d\theta\int\sin\varphi\,d\varphi\int r^2dr$.

2. 对弧长的曲线积分. $\int_L f(x,y)\,ds$.

(1) 定义背景：曲线形细丝的质量.

(2) 计算方法：参数法：一代二换三定限.

① $L: y=y(x)\ (a\le x\le b)$. $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,y(x)]\cdot\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

② $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$ $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$

③ $L: r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$ $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\cdot\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta$

(3) 化简计算：奇0偶倍、轮换对称性.

被积函数为常数 $\int_L 1\,ds=s$.

3. 对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$.

(1) 定义：曲面形薄片的质量.

(2) 计算方法. 投影法. 一代二换三投影.

曲面为 Σ: $z=z(x,y)$. Σ 在 xoy 上投影为 D_{xy}.

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy$$

(3) 化简计算. 奇0偶倍. 轮换对称性

被积函数为常数 $\iint_{\Sigma} 1\,dS=S_{\Sigma}$.

4. 对坐标的曲线积分. $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

(1) 定义、变力沿曲线作功.

(2) L 有方向. $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{L^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

(3) 计算方法：参数法.格林公式.、积分与路径无关时改变路径.

斯托克斯公式.

① 参数~~时~~法：一代二换三定限.

$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $t: \alpha\longrightarrow\beta$.

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t)]\cdot x'(t)+Q[x(t),y(t)]\cdot y'(t)\}dt$$

② 格林公式.

条件：1° L 封闭. 2° L 正向、3° P.Q 在 D 上有一阶连续偏导.

结论. $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$.

常考. 1° L 不封闭. 补线. 2° 偏导有不连续点. 挖点.

③ 积分与路径无关时，改变路径.

选择简单路径.

④ 斯托克斯公式

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

使用斯托克斯公式时做三个工作:

1° 确定曲线 Γ 围成的曲面 Σ 的方程.

2° 求 Σ 的法向量 $\vec{n}$.

3° 找 Σ 在 xoy 上的投影 D_{xy}.

⑤ 积分与路径无关的充要条件.

前提 G 是单连通区域，P,Q 在 G 内有一阶连续偏导数.

$\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关 $\Longleftrightarrow$ 1) 对 G 内任意闭曲线 C, $\oint_C Pdx+Qdy=0$

2) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

3) $\exists\, u=u(x,y)$ s.t. $du=Pdx+Qdy$

4) $\exists\, u=u(x,y)$ s.t. $\text{grad}\,u=P\vec{i}+Q\vec{j}$

5) $Pdx+Qdy=0$ 为全微分方程.

5、对坐标的曲面积分.

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy.$$

① 投影法. 一代二换三投影.

$\Sigma: z=z(x,y)$. Σ在xoy上投影为D_{xy}.

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\cdot(\pm dxdy)$$

② 转换投影法.

$\Sigma: z=z(x,y)$. Σ在xoy上投影为D_{xy}. Σ法向量 $\vec{n}=(-z_x',-z_y',1)$

$$\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy = \pm\iint_{D_{xy}}\left[(P,Q,R)\cdot(-z_x',-z_y',1)\Big|_{z=z(x,y)}\right]dxdy$$

③ 高斯公式

条件: 1° Σ封闭, 2° Σ外侧 3°. P,Q,R有一阶连续偏导

结论: $$\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

常考: 1) Σ不封闭, 补面. 2) P,Q,R有偏导不连续点, 挖点.

6. 散度与旋度.

$\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$, 散度 $\operatorname{div}\vec{A}=P_x'+Q_y'+R_z'$

旋度 $\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

第十一章 向量代数与空间解析几何.

1. 方向余弦

$\vec{OM}=(x,y,z)$. $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

2. 数量积

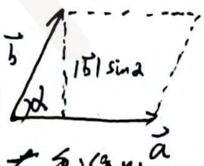
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=a_x\cdot b_x+a_yb_y+a_zb_z$

(2) 几何应用: ① 求 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 α. $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

② $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

3. 向量积

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ 是一个向量: $\begin{cases}\text{模 } |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha \\ \text{方向: } \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b},\ \text{右手法则}\end{cases}$



(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

(3) 运算律 ① $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ ② $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(4) 几何应用: ① 求同时垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量.

② 求以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

③ $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

4. 混合积

(1) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$

(2) 运算律: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=-[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$

(3) 混合积的几何应用

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$

5. 平面方程

(1) 点法式：平面过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

平面方程为：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

(2) 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

(3) 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

6. 直线方程

(1) 点向式：直线过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\vec{s}=(l,m,n)$

直线方程：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

(2) 参数式 $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$

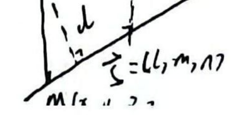
(3) 交面式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，方向向量 $\vec{s}=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$

7. 两个距离

① 点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

② 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 L：$\frac{x-x_1}{l}=\frac{(y-y_1)}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离为 d.

$$d=\frac{|(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)\times(l,m,n)|}{|(l,m,n)|}$$



$d=\frac{|\overrightarrow{MP}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$

8. 曲面方程：二元函数 $z=z(x,y)$， $F(x,y,z)=0$

9. 旋转曲面方程

yoz 上的曲线 $C:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所到的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

10. 常见二次曲面

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$；椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(2) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(3) 旋转抛物面 $z=x^2+y^2$；锥面：$z=\sqrt{x^2+y^2}$

11. 空间曲线

(1) 参数式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ (2) 交面式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

12. 空间曲线投影

曲线 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 xoy 上投影曲线：$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 消去 z，得 $F(x,y)=0$

13. 曲面的切平面与法线.

(1) 曲面的法向量.

① 曲面 $F(x,y,z)=0$ 的法向量 $\vec{n}=\{F_x', F_y', F_z'\}$

② 曲面 $z=z(x,y)$ 的法向量 $\vec{n}=\{-z_x', -z_y', 1\}$

(2) 曲面的切平面和法线方程.

曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$\vec{n}=\{F_x', F_y', F_z'\}\Big|_{M_0}=\{F_x'(x_0,y_0,z_0), F_y'(x_0,y_0,z_0), F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$

① M_0 处的切平面为: ~~极~~ (点法式)

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

② M_0 处的法线为 (点向式)

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

14. 空间曲线的切线与法平面.

(1) 切向量

① 曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在 $t=t_0$ 处对应的点处的切向量 $\vec{\tau}=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

② 曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 M_0 处的切向量 $\vec{\tau}$. $\vec{\tau}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2\Big|_{M_0}$

(2) 曲线 $C\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在 $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处的切向量 $\vec{\tau}=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

① C 在 M_0 处的切线为 $\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$ (点向式)

② C 在 M_0 处的法平面为. $x'(t_0)\cdot(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$

(点法式)

15 方向导数与梯度.

$z=f(x,y)$ 可微. 方向为 l

① 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=\left(f_x'(x_0,y_0),\ f_y'(x_0,y_0)\right)\cdot\frac{l}{|l|}$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(f_x',\ f_y')\cdot\frac{l}{|l|}$$

② 梯度 $\operatorname{grad} z=(f_x',\ f_y')$

③ 方向导数最大值.

当 l 与 $\operatorname{grad} z$ 同方向时, 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 最大, 最大值为 $|\operatorname{grad} z|$.