线性代数背诵重点

第一章 行列式

1. n阶行列式定义

n阶行列式是n!个"位于不同行不同列的n个元素乘积"的和.

注: 2阶、3阶行列式有对角线法则

2. 行列式展开定理

行列式等于任一行(列)的元素与对应代数余子式乘积之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}$$

3. 展开定理推论

错位展开为0.

$k \neq j \quad a_{k1}A_{j1} + a_{k2}A_{j2} + \cdots + a_{kn}A_{jn} = 0$

4. 求某行(列)元素的代数余子式的线性组合, 用替换法.

例：已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，求 $k_1A_{11}+k_2A_{12}+k_3A_{13}$.

解：

$$k_1A_{11}+k_2A_{12}+k_3A_{13}=\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. 常见的数字型行列式的求法

(1) 三角形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdot a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(2) 分块行列式

$$\begin{vmatrix} A_m & O \\ O & B_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_m & O \\ C & B_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_m & D \\ O & B_n \end{vmatrix}=|A_m||B_n|$$

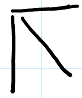
$$\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & D \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

(3) 行和相等的行列式，加列

列 · · · · · · ，加行

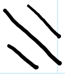
(4) 爪型行列式 化三角形

列 ，加行

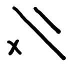
(4) 爪型行列式：，化三角形

(5) 两线一边 ：① 化三角形

② 展开，用递推公式找规律

(6) 三对角线 ：① 化三角形

② 展开，用递推公式找规律

(7) 两线一星 ：按星所在的行 or 列展开

(8) 0 多的行列式：展开

(9) 范德蒙行列式

6. 抽像行列式

(1) 行列式性质

例. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维列向量，$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2$，

求 $|\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_3,\ \alpha_2|$

(2) 行列式的公式

① A, B 为 n 阶方阵：$|kA| = k^n|A|$，$|A^T| = |A|$，

$|AB| = |A||B|$，$|A^k| = |A|^k$

$|A^*| = |A|^{n-1}$

② A 为 n 阶可逆矩阵：$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(3) 特征值与行列式

A_n 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \Longrightarrow |A_n| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

(4) 相似矩阵与行列式

n 阶方阵 A, B 相似 $\Longrightarrow |A| = |B|$, $|f(A)| = |f(B)|$

(5) $|A| \neq 0$、$|A| = 0$ 的充要条件

① $|A_n| \neq 0 \Longleftrightarrow A_n$ 可逆

$\Longleftrightarrow \exists$ n 阶方阵 B, s.t. $AB = E$ or $BA = E$

$\Longleftrightarrow r(A_n) = n$

$\Longleftrightarrow$ A 的列(行)向量组线性无关.

$\Longleftrightarrow$ $A_n x = 0$ 只有零解

$\Longleftrightarrow$ $A_n x = b$ 有唯一解

$\Longleftrightarrow$ 0 不是 A_n 的特征值.

② $|A_n| = 0 \Longleftrightarrow A_n$ 不可逆

$\Longleftrightarrow r(A_n) < n$

$\Longleftrightarrow$ A 的列(行)向量组线性相关.

$\Longleftrightarrow$ $A_n x = 0$ 有非零解

$\Longleftrightarrow$ $A_n x = b$ 有无穷解或无解

$\Longleftrightarrow$ 0 是 A_n 的特征值.

第二章 矩阵

一. 矩阵运算

1. 加法

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\ B=(b_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

2. 数乘

$$A=(a_{ij}) \Rightarrow kA=(ka_{ij})$$

3. 乘法

不满足交换律、消去律.

4. 转置

① $(A^T)^T=A$. ② $(A+B)^T=A^T+B^T$

③ $(kA)^T=kA^T$ ④ $(AB)^T=B^TA^T$

⑤ $A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} A_1^T & A_3^T \\ A_2^T & A_4^T \end{bmatrix}$

5. 伴随

(1) $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

(2) 公式

① $AA^*=A^*A=|A|E$ ② $|A^*|=|A|^{n-1}$

③ $(A^T)^*=(A^*)^T$ ④ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$

⑤ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$ ⑥ $A^*=|A|A^{-1}$

⑤ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$　　⑥ $A^*=|A|A^{-1}$

⑦ $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}A$　　⑧ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

⑨ $(AB)^*=B^*A^*$　　⑩ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(3) 秩

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A_n)=n \\ 1, & r(A_n)=n-1 \\ 0, & r(A_n)<n-1 \end{cases}$$

6. 逆

(1) 定义：A为n阶方阵，若存在 B_n s.t. $AB=E$ or $BA=E$，
则A为可逆矩阵，$B^{-1}=A$. $A^{-1}=B$.

(2) 性质

① $(A^{-1})^{-1}=A$　　② $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

③ $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$ $(k\neq 0)$　　④ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

(3) 求逆 A^{-1}

① 抽象型.　凑 $AB=E$，则 $A^{-1}=B$

② 具体型　1) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

2) $(A:E)\xrightarrow{\text{行}}(E:A^{-1})$

3) 分块 $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & \\ & C^{-1} \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

7. 正交矩阵

$AA^T=E \Leftrightarrow A^T=A^{-1}$

$\Leftrightarrow$ A的每一列为单位向量

$AA^T = E \iff A^T = A^{-1}$

$\iff$ A的每一列为单位向量

A的任两列正交.

$\iff A^T$ 是正交阵

$\iff A^{-1}$ 是正交阵

$\iff A^*$ 是正交阵

A, B为n阶正交阵 $\Rightarrow$ AB为正交阵

8. 方阵的幂的求法.

(1) 秩为1的矩阵

$r(A_n)=1 \iff A$ 可写成"列·行"的形式.

即 $\exists$ n维非0列向量 α, β s.t. $A=\alpha\beta^T$ 且 $\beta^T\alpha = tr(A)$

列·行 = 方阵, 行·列 = 常数 = "列·行"的迹

例 $$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & -3 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(1 \quad -1 \quad 2)$$

$$= \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\left(\tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{2} \quad 1\right)$$

① $r(A_n)=1 \Rightarrow A^k = [tr(A)]^{k-1}A$.

② $r(A_n)=1 \Rightarrow$ A的特征值为 $0, \cdots, 0$ 和 $tr(A)$

且A的非0列向量是 $tr(A)$ 的特征向量

③ $r(A_n)=1$, $tr(A)\neq 0 \Rightarrow$ A可相似对角化.

(2) 归纳法.

(3) A可相似对角化

∃可逆P s.t. $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$, $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

P. 方阵的多项式可分解因式

例: $A^2-E=(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$

$A^2-2A-3E=(A-3E)(A+E)$

$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$

$A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)$

二、初等变换和初等矩阵

1. 初等变换（行、列各有3种）

分块矩阵也可进行初等变换

2. 初等矩阵

E_n经过一次初等变换得到的矩阵为初等矩阵

① E_{ij}表示E的第i行和第j行交换所得的初等矩阵

〃 〃 第i列和第j列 〃 〃 〃

② $E_i(k)$表示E的第i行乘以非0常数k所得的初等矩阵

〃 〃 〃 第i列 〃 〃 〃 〃 〃

③ $E_{ij}(c)$表示E的第i行乘以c加到第j行所得的初等矩阵

〃 〃 〃 第j列乘以c加到第i列 〃 〃 〃 〃

3. 行左列右

对A进行初等行变换相当于在A的左边乘以相应的初等矩阵.

对A进行初等列变换相当于在A的右边乘以相应的初等矩阵.

A左边乘以可逆矩阵相当于对A进行初等行变换

A右边 、、、 、 、 、 、 、 、、列 . . .

4. 初等矩阵的行列式、逆、转置

(1) $|E_{ij}|=-1$ $|E_i(k)|=k$ $|E_{ij}(c)|=1$

(2) $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$ $E_i(k)^{-1}=E_i(\frac{1}{k})$ $E_{ij}(c)^{-1}=E_{ij}(-c)$

(3) $E_{ij}^T=E_{ij}$ $E_i(k)^T=E_i(k)$ $E_{ij}(c)^T=E_{ji}(c)$

5. 应用

① 求 A^{-1}

② 求 $A^{-1}B$: $(A:B)\xrightarrow{行}(E\quad A^{-1}B)$

③ 求 BA^{-1} $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{列}(E\quad BA^{-1})$

④ 行左列右求矩阵乘法

例 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2025}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4&1&6\\1&1&3\\7&1&9\end{bmatrix}$

6. 矩阵等价

$A_{m\times n}$ 经过有限次初等变换得到 $B_{m\times n}$，则称 A 与 B 等价

A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ ∃可逆阵 P, Q，s.t. $PAQ=B$.

A, B 等价 $\Rightarrow r(A)=r(B)$

$r(A)=r(B) \not\Rightarrow$ A, B 等价

A, B 为同型矩阵且 $r(A)=r(B) \Rightarrow$ A, B 等价

三. 矩阵的秩

1. 定义

$A_{m\times n}$ 的非 0 子式最高阶的阶数为 A 的秩

2. 性质

(1) $0 \le r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$

(2) $A=0 \Leftrightarrow r(A)=0$； $A\neq 0 \Leftrightarrow r(A)\geq 1$

(3) A的任意k阶子式全为0 $\Leftrightarrow r(A)<k$.

A中存在k阶子式不为0 $\Leftrightarrow r(A)\geq k$.

(4) $r(A_n)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$

$r(A_n)<n \Leftrightarrow |A|=0$

(5) $r(A+B)\leq r(A:A+B)=r(A:B)\leq r(A)+r(B)$

(6) $r(kA)=r(A)\quad(k\neq 0)$

(7) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

(8) 初等变换不改变矩阵的秩

P.Q为可逆矩阵 $\Rightarrow r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$

(9) $r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

(10) $AB=0\Rightarrow$ B的列是$Ax=0$的解，$r(A)+r(B)\leq$ A的列

(11) ①左乘列满秩，矩阵的秩不变.

$r(A_{m\times n})=n\Rightarrow r(AB)=r(B)$

②右乘行满秩，矩阵的秩不变

$r(A_{m\times n})=m\Rightarrow r(BA)=r(B)$

(12)
$$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A_n)=n \\ 1 & r(A_n)=n-1 \end{cases}$$

(12)

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A_n) = n \\ 1 & r(A_n) = n-1 \\ 0 & r(A_n) < n-1 \end{cases}$$

(13) $A_{m\times n}x=0$ 的基础解系中有 $n-r(A)$ 个无关的解

(14) 若 $A \sim \Lambda$，则 $n_i = n - r(\lambda_i E - A)$，其中 n_i 是 λ_i 的重数

(15) 若 $A \sim \Lambda$，则 $r(A) =$ A的非0特征值的个数

(16)

$$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

$$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \geq r(A) + r(B)$$

(17) α、β 为列向量 $\Rightarrow r(\alpha^T\beta) = r(\beta^T\alpha) \leq 1$

α.β 为非0列向量 $\Rightarrow r(\alpha^T\beta) = r(\beta^T\alpha) = 1$

第三章 向量

一、向量的运算

$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T \quad \beta=(b_1,\cdots,b_n)^T$

1. $\alpha+\beta=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)^T$
2. 内积 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$
3. $(\alpha,\alpha)=\alpha^T\alpha=a_1^2+\cdots+a_n^2\geq 0$;

$\alpha^T\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\vec{0}$

二、线性相关（无关）

1. 定义. $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 n 维向量.

① 若存在一组不全为0的实数 $k_1,\cdots,k_m$, s.t. $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\vec{0}$, 则称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

② 若只有全为0的实数 $k_1,\cdots,k_m$ 才能使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\vec{0}$ 成立, 则称向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

2. 性质

(1) 包含零向量的向量组一定线性相关

(2) 一个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=\vec{0}$

α 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha\neq\vec{0}$

(3) 两个向量 α、β 线性相关 $\Leftrightarrow$ α. β 的分量对应成比例

无关 不成比例

(4) 整体与部分

部分相关 ⟹ 整体相关；整体无关 ⟹ 部分无关

(5) 维数

低维无关 ⟹ 高维无关；高维相关 ⟹ 低维相关

(6) 个数与维数

向量组包含的向量个数大于向量的维数 ⟹ 向量组相关.

3. 线性相关(无关)、方程组的解、秩、行列式之间的关系

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 n 维列向量，

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 有非 0 解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)<m$

$\Leftrightarrow |\alpha_1,\cdots,\alpha_m|=0$ ($m=n$ 时，才有行列式)

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 只有 0 解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m$

$\Leftrightarrow |\alpha_1,\cdots,\alpha_m|\neq 0$ ($m=n$ 时，才有行列式)

4. 线性相关中乘以矩阵的结论

(1) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 n 维列向量，A 为 $s\times n$ 矩阵，

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 相关 $\Rightarrow A\alpha_1,\cdots,A\alpha_m$ 相关

$A\alpha_1,\cdots,A\alpha_m$ 无关 $\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关

(2) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 n 维列向量，A 为 $s\times n$ 的列满秩的矩阵

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 相关 $\Leftrightarrow A\alpha_1,\cdots,A\alpha_m$ 相关

$A\alpha_1,\cdots,A\alpha_m$ 无关 $\Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关

5. 相同个数的等价向量组的相关性

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 表示，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关 $\Rightarrow \beta_1\cdots\beta_m$ 无关

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1\cdots\beta_m$ 的相关性一致

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 表示，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关 $\Rightarrow \beta_1\cdots\beta_m$ 无关

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的相关性一致.

6. 判断线性相关性的方法.

(1) 定义观察法.

例1. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$，显然 $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$

例2. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$.

显然 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0 \Rightarrow \alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$ 相关

(2) 定义方程组法.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 相关 $\Longleftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=\vec{0}$ 有非0解

无　　　　　　　　　　　　只有0解

(3) 定义重组法

例3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，判断 $\alpha_1-\alpha_3$，$2\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_3-\alpha_2$ 的相关性.

解：设 $x_1(\alpha_1-\alpha_3)+x_2(2\alpha_1-\alpha_2)+x_3(2\alpha_3-\alpha_2)=0$

重组 $(x_1+2x_2)\alpha_1+(-x_2-x_3)\alpha_2+(-x_1+2x_3)\alpha_3=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关

$\therefore \begin{cases}x_1+2x_2=0\\-x_2-x_3=0\\-x_1+2x_3=0\end{cases}$，得 x_1,x_2,x_3 不全为0

$\therefore \alpha_1-\alpha_3$，$2\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_3-\alpha_2$ 相关

(4) 秩　$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m \Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关

$<m$　　　　相关

(5) 行列式　$|\alpha_1,\cdots,\alpha_m|\neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关

$=0$　　　　相关

(6) 构造矩阵乘法 + 秩

例3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，判断 $\alpha_1-\alpha_3$，$2\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_3-\alpha_2$ 的相关性.

(6) 构造矩阵乘法+秩

例3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，判断 $\alpha_1-\alpha_3$，$2\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_3-\alpha_2$ 的相关性.

解:

$$(\alpha_1-\alpha_3,\ 2\alpha_1-\alpha_2,\ 2\alpha_3-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关

$$\therefore r(\alpha_1-\alpha_3,\ 2\alpha_1-\alpha_2,\ 2\alpha_3-\alpha_2)=r\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{bmatrix}=2<3$$

$\therefore \alpha_1-\alpha_3$，$2\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_3-\alpha_2$ 相关

(7) 定义+左乘矩阵

例4. 设 A 为 n 阶方阵，α_1,α_2 为非0的 n 维列向量，$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，证明 α_1,α_2 无关

证明: 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=0$ (1)

(1)式两边左乘 A，得 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2=0$

$x_1\lambda_1\alpha_1+x_2\lambda_2\alpha_2=0$ (2)

(1) $\times\lambda_2-$ (2) 得 $x_1(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_1=0$

$\because \alpha_1\neq 0$ $\lambda_1\neq\lambda_2$

$\therefore x_1=0$

将 $x_1=0$ 代入(1) 得 $x_2\alpha_2=0$. 由 $\alpha_2\neq 0$，得 $x_2=0$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2$ 无关

三. 线性表示

1. 定义: $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 β 是 n 维向量.

若存在一组实数 $k_1,\cdots,k_m$，s.t. $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\beta_m=\beta$ 成立，则称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性表示.

2. 性质

(1) 零向量可以由任何一个向量组线性表示

(2) 向量组中的任何一个向量都可以由该向量组线性表示

(1) 零向量可以由任何一个向量组线性表示

(2) 向量组中的任何一个向量都可以由该向量组线性表示

(3) 整体与部分

β 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 中的部分向量线性表示

$\Longrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表示

(4) 传递性

γ 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性表示

$\Longrightarrow \gamma$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性表示

特别地：$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 等价

① γ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 表示 $\Longleftrightarrow \gamma$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 表示

② γ 不可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 表示 $\Longleftrightarrow \gamma$ 不可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 表示

3. 线性表示、方程组、秩、行列式的关系

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 和 β 是 n 维列向量

(1) β 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 表示，且表示法唯一

$\Longleftrightarrow x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$ 有唯一解

$\Longleftrightarrow r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta) = m$

$\overset{m=n}{\Longleftrightarrow} |\alpha_1, \cdots, \alpha_m| \neq 0$

(2) β 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 表示，且表示法不唯一

$\Longleftrightarrow x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$ 有无穷多解

$\Longleftrightarrow r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta) < m$

$\xrightarrow{m=n} |\alpha_1, \cdots, \alpha_m| = 0$

$\xrightarrow{m=n} |\alpha_1,\cdots,\alpha_m|=0$

(3) β不可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$表示

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 无解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\neq r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta)$

$\xRightarrow{m=n} |\alpha_1,\cdots,\alpha_m|=0$

4. 线性表示和维数的关系

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix},\ \alpha_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix},\cdots,\alpha_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\ \vdots\\ a_{ms}\end{bmatrix},\ \beta=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},\ \beta_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{1m}\\ \vdots\\ a_{1n}\end{bmatrix},\cdots,\beta_s=\begin{bmatrix}a_{1s}\\ \vdots\\ a_{ms}\\ \vdots\\ a_{ns}\end{bmatrix}$$

β可由$\beta_1,\cdots,\beta_s$表示 $\Rightarrow$ α可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$表示

α不可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$表示 $\Rightarrow$ β不可由$\beta_1,\cdots,\beta_s$表示

5. 线性相关与线性表示

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$中至少存在一个α_i,

α_i可由其余$m-1$个向量表示

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$中任何一个向量α_i,

α_i都不可由其余$m-1$个向量表示

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$无关, $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$相关 $\Rightarrow$ β可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$表示,

且表示法唯一.

四、向量组等价

1. 向量组之间的表示

(1) 定义

向量组(I) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和向量组(II) $\beta_1,\cdots,\beta_t$. 若(I)中的任一向量 α_i 都可以由向量组(II) $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 表示，则称向量组(I)可由向量组(II)表示.

(2) 构造矩阵乘法

$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表示 $\Longleftrightarrow$ ∃矩阵 X, s.t.

$$(\beta_1,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)X.$$

$$\Longleftrightarrow r(\beta_1,\cdots,\beta_t)=r(\beta_1,\cdots,\beta_t,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$$

例: $\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$

$$(\beta_1,\beta_2)=(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\\3&2\end{bmatrix}$$

重要结论: $AB=C \Longleftrightarrow$ C的列可由A的列表示

$\Longleftrightarrow$ C的行可由A的行表示

(3) 向量组等价

若向量组(I) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和向量组(II) $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可以相互表示，则称(I)和(II)等价.

(I)和(II)等价 $\Longleftrightarrow r(\text{I})=r(\text{II})=r(\text{I}\vdots\text{II})$ 三秩相等.

$\Longleftrightarrow r(\text{I})=r(\text{II})$ 且(I)与(II)中的某一个向量组可由另一向量组表示

(4) 向量组等价与矩阵等价

① 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价 $\not\Longrightarrow$ 矩阵$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$和$(\beta_1,\cdots,\beta_t)$等价

例 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 等价

但矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 和 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ 不等价

② 矩阵 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 和 $(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 等价 $\not\Rightarrow$ $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价

例 $[\alpha_1,\alpha_2]=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$ 和 $(\beta_1,\beta_2)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ 等价，

但 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 不等价

③ $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ (向量个数相同) 是列向量

$A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\vdots\\\alpha_m^T\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}\beta_1^T\\\vdots\\\beta_m^T\end{bmatrix}$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价 $\Longleftrightarrow r(\alpha_1\cdots,\alpha_m)=r(\beta_1,\cdots,\beta_m)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_m)$

$\Longleftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

$\Longleftrightarrow$ A 与 B 行等价

五. 极大无关组

1. 定义

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是一个向量组，$\alpha_{i1},\cdots\alpha_{ir}$ 是其一个部分组，若 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$ 满足 (1) $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$ 无关

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中任一个向量均可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$ 表示

则称 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大无关组。

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$ 中包含的向量个数 r 为向量组的秩，记作 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

注：向量组的极大无关组与向量组等价；

注：向量组的极大无关组与向量组等价；

向量组的极大无关组不唯一，任意 r 个无关向量都可以是其极大无关组.

3. 性质

(1) 秩 ≤ 个数　$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\le m$

$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m \Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关

$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)<m \Leftrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 相关

(2) 被表示的秩 ≤ 表示的秩

$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表示 $\Rightarrow r(\beta_1,\cdots,\beta_t)\le r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

(3) 多被少表示，多相关

$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 表示，$t>s \Rightarrow \beta_1,\cdots,\beta_t$ 相关

六. 施密特正交化

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

则 β_1,β_2,β_3 相互正交（无关且 β_1,β_2,β_3 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价）

令 $\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$，$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$，$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_2$ 为正交的单位向量.

第四章 方程组

一. 方程组解的判定

1. 齐次

(1) 定理: $A_{m\times n}x=0$

$A_{m\times n}x=0$ 有非0解 $\Longleftrightarrow r(A)<n$

$\Longleftrightarrow$ A的列向量线性相关.

$A_{m\times n}x=0$ 只有0解 $\Longleftrightarrow r(A)=n$

$\Longleftrightarrow$ A的列向量线性无关

(2) 推论 $A_{n\times n}x=0$

$A_{n\times n}x=0$ 有非0解 $\Longleftrightarrow r(A)<n$

$\Longleftrightarrow |A|=0$

$\Longleftrightarrow$ A可逆

$\Longleftrightarrow$ A的列向量线性相关.

$A_{n\times n}x=0$ 只有0解 $\Longleftrightarrow r(A)\neq n$

$\Longleftrightarrow |A|=0$

$\Longleftrightarrow$ A不可逆

$\Longleftrightarrow$ A的列向量线性无关

2. 非齐次

(1) 定理 $A_{m\times n}x=b$

$A_{m\times n}x=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})=n$

$\Leftrightarrow$ b 可由 A 的列线性表示，且表示法唯一

$A_{m\times n}x=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<n$

$\Leftrightarrow$ b 可由 A 的列线性表示，且表示法不唯一

$A_{m\times n}x=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(\bar{A})$

$\Leftrightarrow$ b 不可由 A 的列线性表示

(2) 推论 $A_{n\times n}x=b$

$A_{n\times n}x=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})=n \Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\Leftrightarrow$ b 可由 A 的列线性表示，且表示法唯一

$A_{n\times n}x=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<n \Rightarrow |A|=0$

$\Leftrightarrow$ b 可由 A 的列线性表示，且表示法不唯一

$A_{n\times n}x=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(\bar{A}) \Rightarrow |A|=0$

$\Leftrightarrow$ b 不可由 A 的列线性表示

二. 基础解系

$A_{m\times n}x=0$ 的 $n-r(A)$ 个无关的解向量为 $Ax=0$ 的基础解系.

三. 解的性质与结构

1. 齐次

(1) α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的解 $\Rightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解

(k_1,k_2 为任意实数)

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r(A)}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系

$\Rightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r(A)}\alpha_{n-r(A)}$ 为 $Ax=0$ 的通解 ($k_1,\cdots,k_{n-r(A)}$ 为任意实数)

2. 非齐次

(1) α_1, α_2 是 $Ax=b$ 的解 $\Rightarrow$ ① 当 $k_1+k_2=0$ 时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 为 $Ax=0$ 的解

② $\alpha_1-\alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的解

③ 当 $k_1+k_2=1$ 时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 为 $Ax=b$ 的解

(2) α_0 是 $Ax=0$ 的解，α_1 是 $Ax=b$ 的解 $\Rightarrow$ $\alpha_1\pm\alpha_0$ 为 $Ax=b$ 的解

(3) 非通 = 齐通 + 非特

四 公共解

求 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的公共解的方法：

1. 联立求解 $\begin{cases} Ax=0 \\ Bx=0 \end{cases}$ 的解即为 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的公共解

2. 通解代入法.

$Ax=0$ 的通解 $x=k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s$ 代入 $Bx=0$，求出 k_i 之间的关系，代回 $Ax=0$ 的通解

3. 通解相等法

$Ax=0$ 通解 $x=k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s$，$Bx=0$ 通解 $x=l_1\eta_1+\cdots+l_t\eta_t$

则公共解为 $\gamma=k_1\xi_1+\cdots+k_s\xi_s=l_1\eta_1+\cdots+l_t\eta_t$

五. 同解

1. $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow$ A 与 B 的行向量组等价

$\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 的解是 $Bx=0$ 的解且 $r(A)=r(B)$

2. $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解 $\Rightarrow$ $Ax=0$ 与 $\begin{cases} Ax=0 \\ Bx=0 \end{cases}$ 同解

3 $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解.

4. $Ax=\alpha$ 与 $Bx=\beta$ 同解 $\Leftrightarrow$ $(A;\alpha)$ 与 (B,β) 的行向量组等价

$$\Longleftrightarrow r(A,\alpha)=r(B,\beta)=r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}$$

2024年9月21日 11:13

第五章 特征值特征向量

一. 特征值与特征向量

1. 定义

设A为n阶方阵，若 $A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq 0)$，则称 λ 是A的特征值，α 是A的属于 λ 的特征向量.

2. 求具体方阵的特征值、特征向量.

① 解方程 $|\lambda E-A|=0$ 得到A的n个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

② 求方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的非0通解，得到 λ_i 的特征向量.

③ 常见结论.

1) $r(A_n)=1 \Rightarrow$ A的特征值为 $0,\cdots,0$ 和 $tr(A)$

且A的非0列向量是 $tr(A)$ 的特征向量

2) 对角阵、三角阵的特征值是主对角线上的元素

3. 性质

(1) $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为A的n个特征值 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\cdots+\lambda_n=tr(A) \\ \lambda_1\cdots\lambda_n=|A| \end{cases}$

$|A|=0 \Leftrightarrow 0$ 是A的特征值

$|A|\neq 0 \Leftrightarrow 0$不是$A$的特征值

(2) α_1,α_2是A的属于λ的特征向量 $\Rightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$是$\lambda$的特征向量

$(k_1\neq 0, k_2\neq 0)$

(3) 不同特征值对应的特征向量线性无关.

(4) 属于λ的无关特征向量个数不超过λ的重数

$$n-r(\lambda E-A)\leq \lambda\text{的重数}$$

(5)

矩阵	A	kA	A^k	A^{-1}	A^*	$f(A)$	$P^{-1}AP$	A^T
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	λ^{-1}	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	$f(\lambda)$	λ	λ
对应的特征向量	α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$	

4. 常见的暗示特征值、特征向量的信息

① $|aE-A|=0 \Rightarrow a$是A的特征值

② $r(A_n)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow 0$是$A$的特征值

③ $Ax=0$有非0解$\alpha \Rightarrow A\alpha=0\cdot\alpha$

0是A的特征值，α是0的特征向量

④ $A_{3\times3}$. $AB=a\cdot B \Rightarrow a$是$A$的特征值

B的非0列是a的特征向量

⑤ $A_{3\times3}$. $A\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\4&-1\\6&-2\end{bmatrix} \Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\end{bmatrix}=-1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

⑥ $A_{3\times3}$的每行元素之和均为$k \Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\k\\k\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

⑥ $A_{3\times3}$ 的每行元素之和均为 $k \Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\k\\k\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

k 是 A 的特征值，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 k 的特征向量

⑦ $A_{3\times3}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$

$\Rightarrow \quad \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$

⑧ $A_{3\times3}x=b$ 通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+kb$ (k_1,k_2 为任意常数)

$\Rightarrow \quad A\alpha_1=0 \quad A\alpha_2=0, \quad A\beta=kb$

⑨ $A_{3\times3}$ 实对称，特征值为 $\lambda_1=1 \quad \lambda_2=2 \quad \lambda_3=3$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3$. 可求 α_3

⑩ $f(A)=0 \Rightarrow A$ 的特征值的范围是 $f(\lambda)=0$ 的根

二. 相似矩阵

1. 定义

A、B 为 n 阶方阵，若存在可逆 P s.t. $P^{-1}AP=B$，则 A 与 B 相似.

2. 性质

(1) 四个相等.

$$A、B\text{ 相似} \Rightarrow A、B\text{ 有相同的特征值} \Rightarrow \begin{cases}|A|=|B|\\ tr(A)=tr(B)\\ |\lambda E-A|=|\lambda E-B|\end{cases}$$

A、B 相似 $\Rightarrow A$、B 等价 $\Rightarrow r(A)=r(B)$

$A、B$ 相似 $\Rightarrow A、B$ 等价 $\Rightarrow r(A)=r(B)$

(2) $A、B$ 相似 $\Leftrightarrow A^T、B^T$ 相似

$\Leftrightarrow A^{-1}、B^{-1}$ 相似 （$A、B$ 可逆）

$\Leftrightarrow A^*、B^*$ 相似 （$A、B$ 可逆）

$\Leftrightarrow aA+bE、aB+bE$ 相似 $(a\neq 0)$

$\Rightarrow A^k、B^k$ 相似

$\Rightarrow f(A)、f(B)$ 相似

$A\sim\Lambda, A\sim B \Rightarrow B\sim\Lambda$

$A\sim\Lambda, B\sim\Lambda \Rightarrow A\sim B$

三. 相似对角化

1. 充要条件

(1) $A\sim\Lambda \Leftrightarrow A_n$ 有 n 个无关的特征向量

(2) $A\sim\Lambda \Leftrightarrow n-r(\lambda_i E-A)=\lambda_i$ 的重数

2. 充分条件.

(1) A_n 有 n 个互异的特征值 $\Rightarrow A\sim\Lambda$

(2) A 是实对称阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$

(3) $r(A)=1$，$tr(A)\neq 0 \Rightarrow A\sim\Lambda$

(4) $A^2=E \Rightarrow A\sim\Lambda$

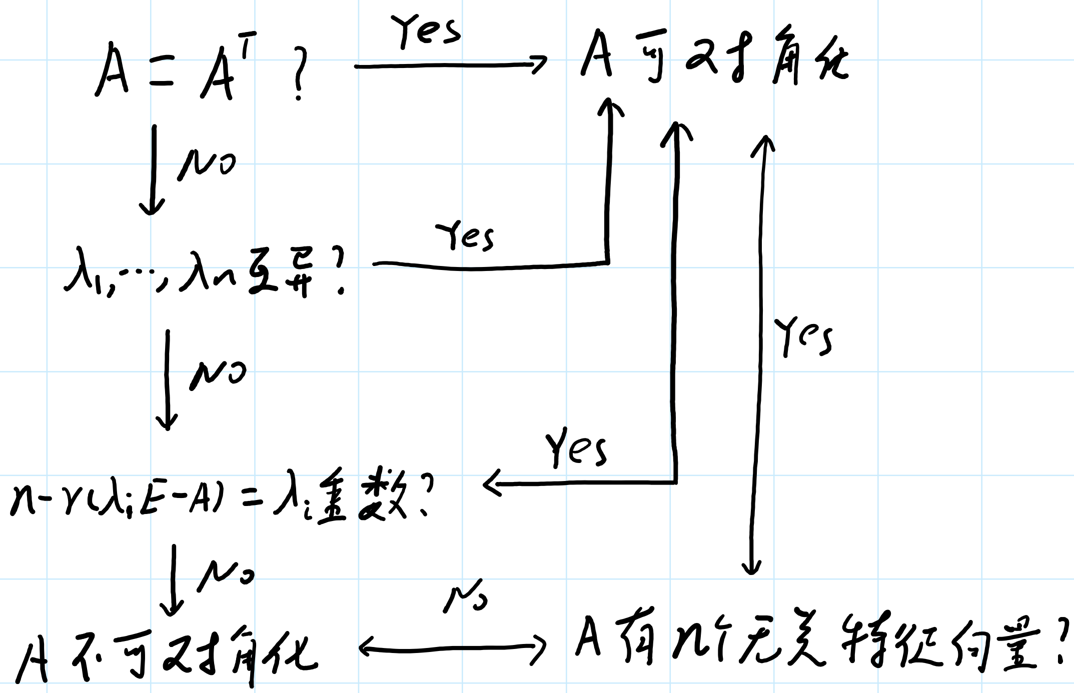
(5) $A^2=A \Rightarrow A\sim\Lambda$

3. 必要条件.

3. 必要条件

$A \sim \Lambda \Rightarrow r(A) =$ A的非0特征值的个数.

4. 判断A能否对角化的步骤:



5. A可对角化, 求可逆P, s.t. $P^{-1}AP=\Lambda$

方法: 两特法

6. 应用:

(1) 求A的幂: $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$, $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

(2) 求A的开方: 已知A且A可对角化, $B=A^k$, 求B.

$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1} = P\Lambda_1 P^{-1}\cdot P\Lambda_1 P^{-1}\cdots P\Lambda_1 P^{-1}$ $(\Lambda_1^k=\Lambda)$

$\Rightarrow B=P\Lambda_1 P^{-1}$

(3) 利用特征值特征向量求A.

$$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$$

7. $P^{-1}AP=\Lambda$，用P将其它与A相关矩阵对角化

① $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow P^{-1}(A+aE)P=\Lambda+aE$，$P^{-1}(kA)P=k\Lambda$

$$P^{-1}A^2P=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP=\Lambda^2$$

$$P^{-1}\cdot f(A)\cdot P=f(\Lambda)$$

② $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=\Lambda^{-1}$

$$P^{-1}(A+A^{-1})P=\Lambda+\Lambda^{-1}$$

③ $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow P^{-1}A^{*}P=\Lambda^{*}$

$$P^{-1}(A+A^{*})P=\Lambda+\Lambda^{*}$$

8. 判断A、B相似的方法，求P s.t. $P^{-1}AP=B$

(1) A.B可对角化，A.B有相同特征值$\Rightarrow A$.B相似.

(2) $P_1^{-1}AP_1=\Lambda$，$P_2^{-1}BP_2=\Lambda \Rightarrow P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$

$$\Rightarrow B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$$

令$P=P_1P_2^{-1}$，有$P^{-1}AP=B$

四. 实对称阵

1. 性质

A为实对称阵 $\Rightarrow$ ① 不同特征值对应的特征向量正交

$\Rightarrow$ ② A可对角化

2. 实对称阵A对角化方法:

2. 实对称阵A对角化方法:

(1) 求可逆 P s.t. $P^{-1}AP=\Lambda$，两特法

(2) 求正交 Q s.t. $Q^TAQ=\Lambda$，两特两化法

3. 用特征值特征向量反求实对称阵A

(1) $P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$

(3) $Q^TAQ=\Lambda \Rightarrow A=Q^T\Lambda Q$.

$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$，则 $A=\lambda_1\gamma_1\gamma_1^T+\lambda_2\gamma_2\gamma_2^T+\lambda_3\gamma_3\gamma_3^T$

4. $Q^TAQ=\Lambda$，用Q将其它与A相关矩阵对角化.

① $Q^TAQ=\Lambda \Rightarrow Q^T(A+aE)Q=\Lambda+aE$，$Q^T(kA)Q=k\Lambda$

$$Q^TA^2Q=Q^TAQQ^TAQ=\Lambda^2$$

$$Q^Tf(A)\cdot Q=f(\Lambda)$$

② $Q^TAQ=\Lambda \Rightarrow Q^TA^{-1}Q=\Lambda^{-1}$

$$Q^T(A+A^{-1})Q=\Lambda+\Lambda^{-1}$$

③ $Q^TAQ=\Lambda \Rightarrow Q^TA^*Q=\Lambda^*$

$$Q^T(A+A^*)Q=\Lambda+\Lambda^*$$

第六章 二次型

一. 基本概念

1. 二次型及其矩阵

(1) 含3个变量 x_1, x_2, x_3 的二次齐次函数:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + b x_1x_2 + c x_2x_3 + d x_1x_3$$

为3元二次型

(2) 矩阵表示

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & a_{22} & \frac{c}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{c}{2} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^TAx$$

A 为对称阵, 称 A 为二次型的矩阵. $r(A)=r(f)$

注: ①若 $f(x_1, x_2, x_3) = x^TBx$, 但 B 不是实对称阵,

则 f 的矩阵 $A = \frac{B+B^T}{2}$.

②快速写平方和形式的二次型的矩阵

例: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3+x_1)^2$, 求二次型的矩阵 A.

解：$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2-x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$， $y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=Bx$

$f=y^Ty=x^TB^TBx$，则 $A=B^TB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. 标准形：只含有平方项的二次型为标准形.

标准形的矩阵是对角阵

3. 规范形：标准形中，平方的系数为 $-1, 1, 0$ 的标准形称为规范形.

4. 正、负惯性指数：二次型为 x^TAx（A 对称）

正惯性指数 p：标准形中正的平方项的个数

对称阵 A 的正的特征值的个数

负惯性指数 p：标准形中负的平方项的个数

对称阵 A 的负的特征值的个数

$r(A)=r(f)=A$ 的非0特征值的个数 $=p+q$

5. 线性变换

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+c_{13}y_3 \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+c_{23}y_3 \\ x_3=c_{31}y_1+c_{32}y_2+c_{33}y_3 \end{cases}$$

$x=Cy$，C 为可逆阵

二次型经过可逆线性变换可变成另外一个二次型（不

二次型经过可逆线性变换可变成另外一个二次型(不一定是标准形)

$$x^TAx \xlongequal{x=Cy} y^TC^TACy, \quad C^TAC 与 A 合同.$$

二. 二次型化标准形.

1. 正交变换法

$$f=x^TAx \xlongequal{x=Qy} y^TQ^TAQy = y^T\Lambda Q \quad (Q^TAQ=\Lambda)$$

(1) 求正交阵Q 用俩特两法化.

(2) 正交变换法得到的标准形的系数是对称阵A的特征值.

(3) 正交变换法只能将二次型化成标准形,而不能化成规范形. 一般来说,化二次型为规范形还需要进行一步线性变换 $y=Cz$.

特殊情况,A为正交阵,则用正交换法可一步将二次型 x^TAx 化为规范形. (正交阵的特征值为±1)

2. 配方法

配方法要求逐项配方.

配方法可用可逆的线性变换将二次型一步化成规范形.

三. 合同

1. 定义. A、B为n阶阵，存在可逆阵C s.t. $C^TAC=B$，则称A、B合同

2. 性质. A、B合同 $\Rightarrow$ A、B等价 $\Rightarrow r(A)=r(B)$

3. 判断实对称阵A、B合同，并求C s.t $C^TAC=B$.

① A、B为实对称阵，A、B有相同的正负惯性指数 $\Rightarrow$ A、B合同

注: A、B为实对称阵时，A、B相似 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ A、B合同

② 求C

1° $x^TAx \xrightarrow[\text{配方}]{x=C_1y} y^TC_1^TAC_1y$ 为规范形. $C_1^TAC_1=\Lambda$

2° $x^TBx \xrightarrow[\text{配方}]{x=C_2y} y^TC_2^TBC_2y$ 为规范形. $C_2^TAC_2=\Lambda$

3° $C_1^TAC_1=C_2^TBC_2 \Rightarrow B=(C_2^T)^{-1}C_1^TAC_1C_2^{-1} \xlongequal{C=C_1C_2^{-1}} C^TAC$

③ 特殊: A、B为实对称阵，A、B相似 $\Rightarrow$ 存在正交阵Q，使得 $Q^TAQ=B$. 并会求Q.

方法: 1° 求正交Q_1 s.t. $Q_1^TAQ_1=\Lambda$

2° 求正交Q_2 s.t. $Q_2^TBQ_2=\Lambda$

3° $Q_1^TAQ_1=Q_2^TBQ_2 \Rightarrow B=Q_2Q_1^TAQ_1Q_2^T$

令 $Q=Q_1Q_2^T$，则 $Q^TAQ=B$

（Q_1,Q_2正交 $\Rightarrow Q_2^T$正交，$Q=Q_1Q_2^T$正交）

四. 正定二次型和正定阵.

四、正定二次型和正定阵

1. 定义

对 $\forall\ x \neq \vec{0}$，都有 $x^TAx > 0$，则称二次型 x^TAx 为正定二次型，实对称 A 为正定矩阵.

2. 正定的充要条件

前提 A 为实对称阵.

A 正定 $\Longleftrightarrow$

- （定义）对 $\forall\ x \neq \vec{0}$，$x^TAx > 0$
- A 的特征值全为正
- x^TAx 的标准形的系数全为正
- f 正惯性指数 $p = n$
- A 的顺序主子式全大于 0
- $\exists$ 可逆 P s.t. $A = P^TP$，即 A 与 E 合同

3. 正定的必要条件

A 正定 $\Longrightarrow$

① $a_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

② $|A| > 0$

③ A^{-1}，A^* 也正定.